

寄 書

剛性マトリックスによる  
水平成層地盤の波動解析

宮崎大学工学部\*

原田隆典

宮崎大学大学院工学研究科博士後期課程\*

王 宏沢

Stiffness-Matrix Based Representation of Wave  
Motions in Horizontally Layered Media

Takanori HARADA

Faculty of Eng., Miyazaki University,  
1-1 Gakuen

Kibanadai Nishi, Miyazaki 889-2192, Japan

Hongze WANG

Graduate School, Miyazaki University, 1-1 Gakuen  
Kibanadai Nishi, Miyazaki 889-2192, Japan

(Received April 28, 2004;

Accepted August 30, 2004)

§1. はじめに

Fig. 1 に示すような半無限地盤を最下層とする  $n$  層からなる水平成層地盤 (簡単のため 4 層の場合を描いている) における地震波動場または弾性波動場を解析する方法の 1 つとして, 著者らは, 剛性マトリックスによる波動場の定式化とその適用性について検討してきた. 層内には運動学的断層モデルの震源を取り入れることができる. また, 各層の境界上に単位面積あたりの外力を作用させることもできる. したがってこの方法は, 断層運動による地震波動場の解析や外力による地盤振動解析に利用することができる. これまでの検討から, 剛性マトリックスによる波動場の定式化は, 剛性マトリックスの考え方が構造工学分野で馴染み深いこともあり, 工学分野の研究者や技術者にとっては理解しやすいという側面に加えて, コンピュータの記憶容量と計算速度の性能向上により工学問題に対して十分適用可能な状況になっていると考えるようになり, ここにその概要を記述するものとする.

簡単に振動数-波数領域の解析的研究の歴史に触れて,

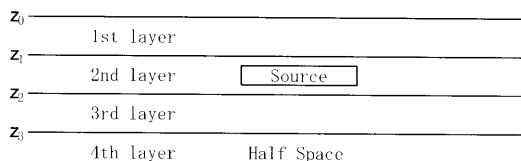


Fig. 1. Cross section of the horizontally layered elastic media [Harada and Yamashita (2000)].

剛性マトリックスによる定式化の大まかな位置づけをしておく. Lamb (1904) は, 振動数-波数領域の解析法を使って無限地盤や半無限地盤における波動の定式化と計算例を示した. Bouchon (1979a, b) は, この方法を用いて運動学的断層モデルから放射される地震波の定式化を行い, Thomson (1950) と Haskell (1953) による伝達マトリックス法と組み合わせ水平成層地盤の地震波動場の解析法を示し, この方法を離散波数法と呼んでいる. Chouet (1987) は, これら伝達マトリックス法による地震波動問題の定式化や研究の現状をまとめている. 一方, Kausel and Roësset (1981) は, 水平成層地盤における層上下端の変位-応力ベクトルの関係を表す伝達マトリックスを基に, これを層上下端の応力と変位の関係を表す剛性マトリックスに書き換えた剛性マトリックス法を提案している. 剛性マトリックスへ書き換えることによって, 高振動数領域や層厚の大きい層において伝達マトリックスを計算する際に生じる計算上の不安定性を克服するために行う数値計算上の特別な取り扱い (例えば, Chouet (1987) を参照) をせずに, 安定的な計算をすることができることを示した. この伝達マトリックスの数値計算過程で生じる不安定性を克服するための別な方法への展開もなされている (例えば, Kennet and Kerry (1979), Luco and Aspel (1983) の反射・透過行列法への展開, Chin・他 (1984), Schmidt and Tango (1986) のグローバル行列法への展開). しかし, 剛性マトリックスは, 対称行列であり, また構造技術者や工学分野の研究者には馴染み深いものである. 特に工学分野の技術者には, 解析や数値計算の取り扱いが容易であるという特徴がある. なお, Kausel and Roësset (1981) は, 波長に比べ十分に薄い層を仮定すると, 剛性マトリックスが波数と振動数の 2 次式で近似できるといいうゆる薄層要素法への方向に多くの紙面を割いている. この薄層要素法も工学的には魅力的な方法である (例えば, 日本建築学会 (1996)) が, コンピュータの性能向上とともに, 近似もせずに解析解をそのまま用いて, 式 (1) で示されるようなあらゆる方向からあらゆる速度で伝播してくる平面波の足し合わせ (三重フーリエ変換) によって時空間での波動場が記述できるという物理

\* 〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1

的に解釈しやすい形式の方が直接的でわかりやすく、実用的になっていると思われる。

しかし、剛性マトリックス法は、これまで運動学的断層モデルとの組み合わせ方法に関する定式化を含め、地震波動場の解析法への適用に関する研究など、著者らの研究 [原田・他 (1999), Harada and Ohsumi (2000), 原田・山下 (2000), 原田 (2004)] 以外にあまり波動問題解析に用いられていないようである。原田・山下 (2000) では、動的断層モデルが存在する層の外力ベクトルが式 (4) で与えられることを初めて導き、剛性マトリックスによる地震波動場解析法の定式化を示している。

## § 2. 剛性マトリックスによる水平成層地盤の解析法の概要

Fig. 1 のような水平成層地盤モデルにおける弾性波動場解析法の概要を記述する。座標は 3 次元直交座標系  $(x, y, z)$  を使用し、時間座標を  $t$  とする。深さ  $z$  の平面上の任意点  $(x, y)$  の変位は、次のような波数  $(\kappa_x, \kappa_y)$  と振動数  $\omega$  に関する三重フーリエ積分によって計算する。実際には、高速フーリエ変換の方法によって離散化した計算を行う (例えば, Brigham (1978)) ので、荷重点から遠くの波形が十分減衰して零になるような広い領域を想定し離散化をするというような離散フーリエ変換に関する注意が必要となる。

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \dots \int \dots \int \dots \mathbf{u}(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \times e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t)} d\kappa_x d\kappa_y d\omega \quad (1)$$

ここに、変位  $u, v, w$  をまとめて変位ベクトル  $\mathbf{u}$  として表現している。上式の振動数-波数領域での変位  $\mathbf{u}(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega)$  は、SH 波による変位  $v_0(z) \equiv v_0(\kappa, z, \omega)$  と P-SV 波による変位  $u_0(z) \equiv u_0(\kappa, z, \omega)$ ,  $w_0(z) \equiv w_0(\kappa, z, \omega)$  を次式に代入して求める。

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{\kappa_x}{\kappa} u_0(z) - \frac{\kappa_y}{\kappa} v_0(z) \\ v(z) &= \frac{\kappa_y}{\kappa} u_0(z) + \frac{\kappa_x}{\kappa} v_0(z) \\ w(z) &= w_0(z) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $-\infty \leq \kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \leq \infty$  で、SH 波と P-SV 波が進む方向の波数を表す。また、 $\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega)$  と簡略化して表現している。

詳細は、原田・山下 (2000) に譲るが、伝達マトリックスによる定式化を剛性マトリックスの定式化に書き換えることによって、振動数-波数領域における SH 波と P-SV 波による地盤変位ベクトル  $\mathbf{u}_0(z) \equiv \mathbf{u}_0(\kappa, z, \omega)$  は、次式の剛性方程式 (連立 1 次方程式) を解いて求めることができる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0(z_0) \\ \mathbf{q}_0(z_1) + \mathbf{q}_s(z_1) \\ \mathbf{q}_0(z_2) + \mathbf{q}_s(z_2) \\ \mathbf{q}_0(z_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} + \mathbf{K}_{11}^{(3)} & \mathbf{K}_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{21}^{(3)} & \mathbf{K}_{22}^{(3)} + \mathbf{K}_{Half} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0(z_0) \\ \mathbf{u}_0(z_1) \\ \mathbf{u}_0(z_2) \\ \mathbf{u}_0(z_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{K}_{ij}^{(n)}$  と  $\mathbf{K}_{Half}$  は第  $n$  層と半無限地盤の剛性マトリックスを表す。上式の右辺第 1 項が Fig. 1 のような全体系の剛性マトリックスを表しているが、これは第  $n$  層の剛性マトリックスを重ね合わせの原理に従って組み立てることにより求められる。また、上式左辺は振動数-波数領域での外力項で、 $\mathbf{q}_0(z_n)$  は、深さ  $z_n$  の層境界に作用する単位面積当たりの外力 (応力) の SH 波、P-SV 波成分を表す。また、 $\mathbf{q}_s(z_n)$  は、運動学的断層モデルから放射される地震波による外力で、次式から求められる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_s(z_1) \\ \mathbf{q}_s(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(2)} & \mathbf{K}_{12}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(2)} & \mathbf{K}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s^{(2)}(z_1) \\ \mathbf{u}_s^{(2)}(z_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\tau}_s^{(2)}(z_1) \\ \boldsymbol{\tau}_s^{(2)}(z_2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{u}_s^{(n)}(z)$ ,  $\boldsymbol{\tau}_s^{(n)}(z)$  は、第  $n$  層内 (Fig. 1 では第 2 層内) に存在する断層より放射される地震波によって深さ  $z$  の位置に生じる変位と応力を意味する。これらを計算する具体式は [原田・他 (1999), 原田 (2004)] に示されているので省略する。

式 (1)~(4) を使うと、以下のような水平成層地盤の地震波応答や振動などの波動に関する基本的問題がすべて解析できる。例えば、

(1) 第 2 層に震源断層が存在し、各層境界に外力が作用しないような場合 (地震波動問題)、外力項  $\mathbf{q}_0(z_n)$  を零とおいて剛性方程式を解き変位ベクトルを求めると、震源断層による水平成層地盤の応答変位が求められる。

(2) また、震源断層が存在しないで、地表面あるいは層境界に外力が作用する場合 (外力による地盤振動問題)、震源断層による外力項  $\mathbf{q}_s(z_n)$  を零として剛性方程式を解き外力による地盤振動変位が求められる。

(3) さらに、式 (3) の左辺の外力項をすべて零とし、零でない変位ベクトル  $\mathbf{u}_0(z) = \mathbf{u}_0(\kappa, z, \omega)$  が存在するための条件から式 (3) 右辺第 1 項の全体剛性マトリックスの行列式が零となるような波数  $\kappa (= \omega/c)$  と振動数  $\omega$  の組み合わせを求めると、いわゆる表面波 (P-SV 波問題のレイリー波、SH 波問題のラブ波) の伝播速度 (位相速度

c) と振動数の関係 (分散曲線) が求められる。

なお、本文中で記述する剛性マトリックス法では、各層境界での変位が一度に求まるので、すべての深さ方向と平面内の変位が一挙に計算できる。また、断層が層を跨いで存在する場合にも、式 (4) で計算される断層による外力項を対応する層に作用させて、変位を計算することができる。

### § 3. 運動学的断層モデルによる地表地震動の計算例

Fig. 2 は、半無限地盤中に存在する長さ 30 km、幅 8.5 km の矩形横ずれ断層が破壊し、厚さ 1.5 km の表層堆積層の地表面での地震動変位波形を伝達マトリックスを使って計算した Bouchon (1980) の論文から読み取ったものと、剛性マトリックス法による結果を比較したものを示す。変位波形は断層の平均すべり量  $D$  で基準化している。観測点は横ずれ断層を地表面に投影したときの断層線を  $x$  軸とし (原点を断層破壊開始点とする。), 直交方向に  $y$  軸をとると、 $x=14,915$  m (約 15 km),  $y=$

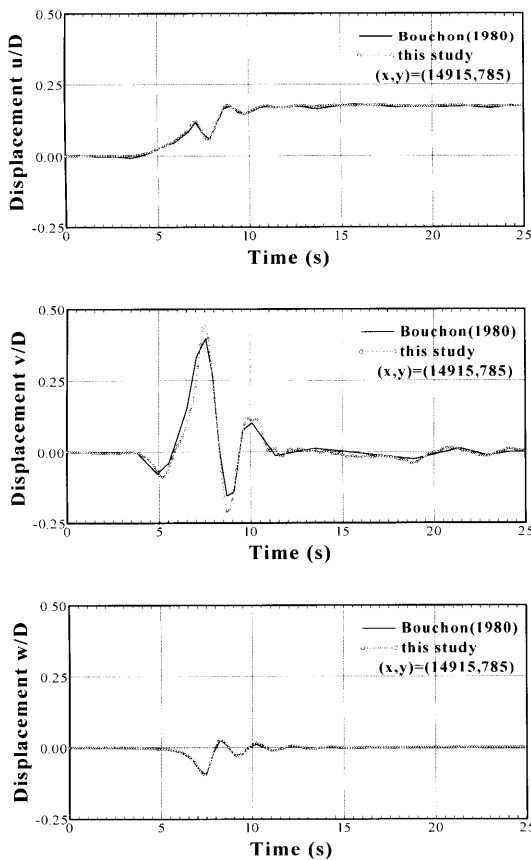


Fig. 2. Comparison of normalized ground motion displacements between Bouchon (1980) and this study [Harada, *et al.* (1999)].

785 m (約 1 km) の地点で、断層線のほぼ中央で断層線から約 1 km 離れた地点である。また、半無限媒質と表層の物性値 (密度 ( $\text{g/cm}^3$ ), S 波速度 ( $\text{km/s}$ ), P 波速度 ( $\text{km/s}$ )) は、それぞれ (2.80, 3.50, 6.00) と (2.30, 1.75, 3.00) を仮定し、断層は左端から一様な速度 2.2  $\text{km/s}$  で破壊するとしている。

Fig. 2 では、断層平行方向の地震動変位には、横ずれ断層による地盤の永久変位が見られ、また、断層直交方向の変位が最も大きくパルス状の波形が現れているなどの特徴が観察される。そして両者の方法による地震波形は一致しており、剛性マトリックスによる定式化の妥当性を示している。

Fig. 3 は、同じ震源断層・地盤モデル (ただし、断層長さと同幅が 8.5 km) を用いて、断層近傍の地表面 15 km 四方の水平速度分布の時間的変化を示す [原田・山下 (2000)]. 9 つの時刻ごとの水平成分の分布図において、中央から右方向へ伸びる黒帯は、震源断層の破壊領域の地表面への投影長さを表す。断層長さ 8.5 km、断層の破壊速度 2.2  $\text{km/s}$  より、約 3.9 ( $=8.5/2.2$ ) s で破壊が終了する。また、各図の矢印の方向と長さは、断層の平均すべり量  $D=1$  m と仮定したときの地表面各地点の水平地震動の向きと大きさを表す。

これらの地震波の時空間分布図から、断層破壊の開始から終了付近にかけて、地表面に時計回りと半時計回りの渦が現れ、あたかも台風の雲のように渦を巻きながら地震波が伝播しているように見える。図は省略するが、これらの複雑な空間分布特性は、変位波形、速度波形、加速度波形のように短周期地震波になるほど短い距離で変化している [原田 (2004)]. これらの複雑な時空間分布特性は、原田・山下 (2000) が検討しているが、震源の複双力に基づいた運動学的断層モデルにおける断層破壊伝播特性と表層地盤内の S 波の伝播特性に、ディレクティビティー効果も加わった結果として現れる現象であると考えられる。

このような断層による地盤の永久変位を含む震源断層近傍の特異な地震動による連続高架橋や地中パイプラインの非線形応答挙動について現在研究がなされている [原田・野中 (2001), 原田・他 (2003a), 原田 (2004)].

### § 4. 半無限地盤において鉛直方向に集中外力が作用するときの地表面変位波形の計算例

半無限地盤地表面に鉛直方向の集中荷重が作用するときの地表面の振動問題は、Lamb (1904) の問題としてよく知られている基礎的問題であるが、剛性マトリックス法によって計算した振動源から 20 km 地点の半径方向と鉛直方向の変位波形を Fig. 4 に示す。半無限地盤の物

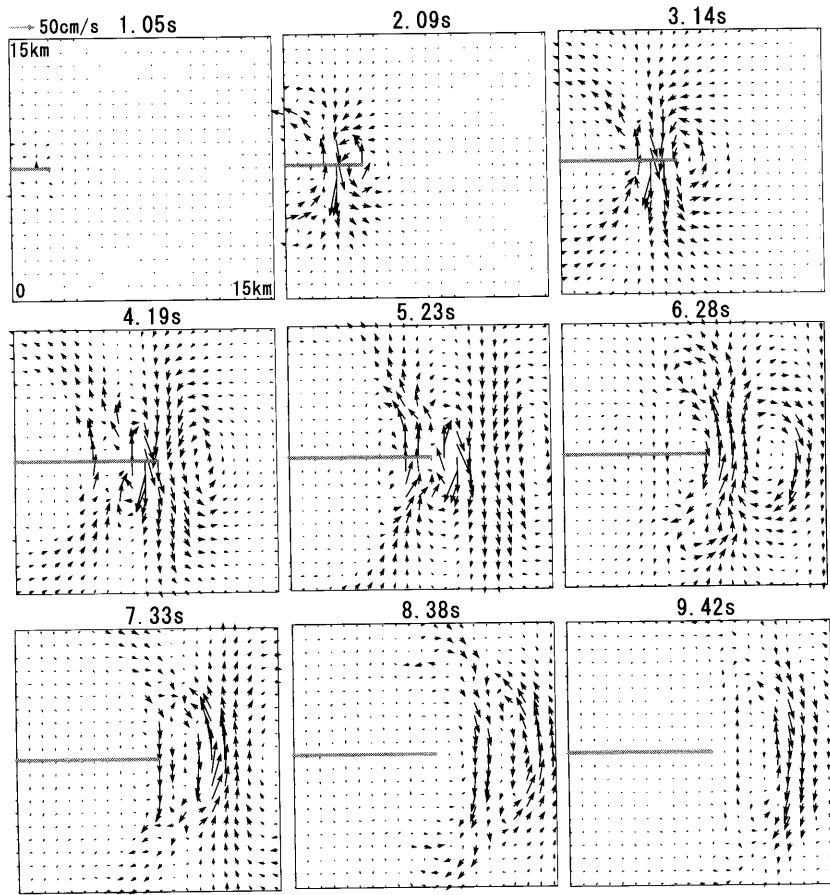


Fig. 3. Snapshots of horizontal ground motion velocities on free field ground surface of 15 km square near the strike slip fault, at 9 time instants.

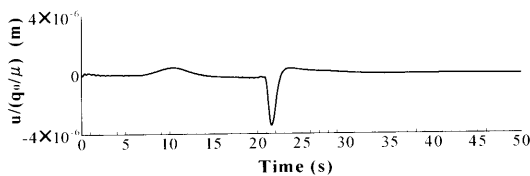


Fig. 4(a). Radial component of ground motion displacement at 20 km from loading point.

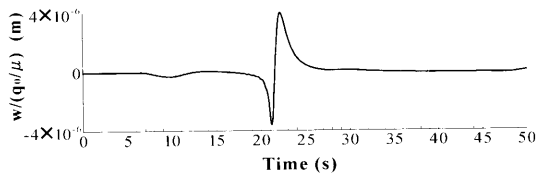


Fig. 4(b). Vertical component of ground motion displacement at 20 km from loading point.

性値は、密度 2.30 g/cm<sup>3</sup>, S波速度 1.0 km/s, P波速度 3.0 km/s, とした。この場合、レイリー波の位相速度は

0.947 km/s となる。単位面積当たりの鉛直集中荷重は、

$$q_w(t) = q_0 \frac{t}{t^3 + \tau^3}$$

なる周期 3 秒くらいのパルスとした ( $\tau = 1.0$  秒)。

Fig. 4 では、P 波が約 7 秒 (正確な到達時刻は 6.7 秒 (20/3)), 振幅の大きいレイリー波は約 21 秒に到達しているのが読み取れるが、S 波に関しては、理論的には 20 秒 (20/1.0) で到達するが、振幅の大きいレイリー波の理論的到達時刻 21.1 秒 (20/0.947) と近いこともあり、はっきりと到達時間を読み取れないものの P 波、S 波、レイリー波の特徴を読み取ることができる。

### § 5. 多層地盤におけるレイリー波の分散曲線の計算例

反射・透過行列法によってレイリー波の位相速度と振動数の関係 (分散曲線) を計算した Chen (1993) の結果と剛性マトリックス法による結果を比較すると、Fig. 5 が得られた。なお、地盤構造やその物性値に関しては、

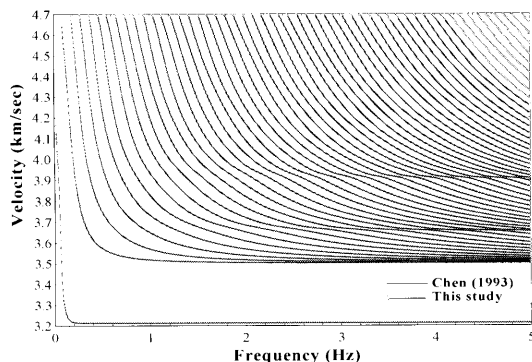


Fig. 5. Comparison of dispersion curves of Rayleigh wave phase velocity in multi-layered media obtained from Chen (1993) and this study.

半無限媒体上に厚さ 6 km, 6 km と 18 km の 3 層の水平成層地盤を仮定し, 半無限媒質の物性値 (密度 ( $\text{g}/\text{cm}^3$ ), S 波速度 ( $\text{km}/\text{s}$ ), P 波速度 ( $\text{km}/\text{s}$ )) は, (3.30, 4.70, 8.20), また最下層, 中間層と表層の物性値は, それぞれ, (3.10, 3.90, 6.70), (2.90, 3.65, 6.30), (2.80, 3.50, 6.00) を仮定している。

Fig. 5 から両者は完全に一致しており, 剛性マトリックス法の妥当性が確認できる。

## § 6. おわりに

水平成層地盤における弾性波動場解析法の 1 つとして, 剛性マトリックスを用いた方法の概要とこの方法による地震波伝播問題, 外力による地盤振動問題, 表面波の分散曲線など波動に関する基礎的問題に対する数値計算例を示した。剛性マトリックスは構造工学分野の技術者や研究者には馴染み深く, 構造物解析でよく知られている部分解析法などの考え方をそのまま波動解析に使うことができる。工学問題でよく使われる地盤物性値や地盤構造の不確定性と地表面波形の関係を調べる感度解析では, 水平多層地盤を深部地盤と表層地盤の 2 つに分けて部分的に解析し, 両者を結合して全体地盤系の波動を効率的に解析することができる [原田・松尾(1999)]。この部分解析法の考え方と有限要素法や境界要素法を使うと, 不整形地盤系の波動解析を効率的に行うことができるが, このような研究への展開もなされている [原田・他(2002), 原田・他(2003b)]。ここでは, 順解析の例を記述したが, 地盤物性値や地盤構造の推定などの逆解析への展開については今後発表する予定である。

## 文 献

Bouchon, M., 1979a, Discrete wave number represen-

- tation of elastic wave field in three dimensional space, *J. Geophys. Res.*, **84**, 3609–3614.
- Bouchon, M., 1979b, Predictability of ground displacement and velocity near an earthquake fault, An example: The Parkfield Earthquake of 1966, *J. Geophys. Res.*, **84**, 6149–6156.
- Bouchon, M., 1980, The motion of the ground during an earthquake, 1. The case of a strike slip fault, *J. Geophys. Res.*, **85**, 356–366.
- Brigham, E. O., 1974, *The fast fourier transform*, Prentice-Hall, Inc.
- Chen, X., 1993, A systematic and efficient method of computing normal modes for multilayered half space, *Geophys. J. Int.*, **115**, 391–409.
- Chin, R. C. Y., G. W. Hedstrom, and L. Thigpen, 1984, Matrix methods in synthetic seismograms, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **77**, 483–502.
- Chouet, B., 1987, Representation of an extended seismic source in a propagator-based formalism, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **77**, 14–27.
- Haskell, N. A., 1953, The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 17–34.
- 原田隆典, 大角恒雄, 奥倉英世, 1999, 3次元直交座標系における波動場の解析解とその地震動波形作成への応用, *土木学会論文集*, No. 612/I-46, 99–108.
- 原田隆典, 松尾聡一郎, 1999, 震源から地表地盤に至る地震波伝播計算における部分解析法の応用, *応用力学論文集*, 土木学会, **2**, 495–502.
- Harada, T. and T. Ohsumi, 2000, Stiffness matrices based formalism of ground motion synthesis and differential ground motions, *Proc. of the 12<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering*, CD-ROM, Paper No. 603/4/R.
- 原田隆典, 山下 肇, 2000, 剛性マトリックスに基づく地震動の波形合成法と震源断層近傍地震動の渦現象, *応用力学論文集*, 土木学会, **3**, 495–502.
- 原田隆典, 野中哲也, 2001, 断層近傍における連続高架橋の地震応答特性, *構造工学論文集*, **47**, 843–849.
- 原田隆典, 黒田拓氏, 山上武志, 2002, 3次元直接境界要素法による震源断層-不整形地盤系の応答解析と震源断層近傍地震動の渦現象, *構造工学論文集*, **48**, 587–594.
- 原田隆典, 王 宏沢, 野中哲也, 山下典彦, 2003a, 横ずれ断層を横断する連続高架橋の応答挙動解析, *応用力学論文集*, 土木学会, **6**, 701–711.
- 原田隆典, 岡田洋輔, 王 宏沢, 小林正樹, 2003b, 境界要素法に部分解析法を用いた震源断層-不整形地盤系の効率的な地震動シミュレーション, *土木学会地震工学論文集*, CD-ROM Paper No. 72.
- 原田隆典, 2004, 海洋および内陸型地震の震源域における長大構造物の応答特性の評価とその予測法, 平成 13～15 年度科学研究費補助金基盤研究 (C) (2) 研究報告書, 課題番号 13650527, 宮崎大学工学部.
- Kausel, E. and J. M. Roësset, 1981, Stiffness matrices for layered soils, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **71**, 1743–1761.

- Kennet, B. L. N. and N. J. Kerry, 1979, Seismic waves in a stratified half space, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **57**, 557-583.
- Lamb, H., 1904, On the propagation of tremors at the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A203, 1-42.
- Luco, J. E. and R. J. Apsel, 1983, On the Green's functions for a layered half-space, Part 1, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 909-929.
- 日本建築学会編, 1996, 入門・建物と地盤との動的相互作用, 日本建築学会.
- Schmidt, H. and G. Tango, 1986, Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **84**, 331-356.
- Thomson, W. T., 1950, Transmission of elastic wave through a stratified soil medium, *J. Appl. Phys.*, **21**, 89-93.